Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Studio della modalità spettroscopica dello strumento SuperFOSC per il telescopio Cassini

Relatore:
Prof. Matteo Lombini

Presentata da:
Enrico Mannocci

Anno Accademico 2020/2021

Sommario

Questo studio mette a confronto diverse configurazioni spettroscopiche applicabili allo strumento SuperFOSC, che è attualmente ancora in progettazione e verrà utilizzato dal telescopio Cassini di Loiano. In particolare, si indagherà quale tra le orientazioni e le tipologie di grism[1] presentate ha potere risolutivo massimo per traiettorie rettilinee passanti per il centro del campo di vista.

[1] *Grating Prism*

Capitolo 1

Premessa

Dallo Sputnik 1 ad oggi, l'uomo ha lanciato in orbita attorno al nostro pianeta quasi 50000 oggetti [4]. Molti di essi sono caduti sulla Terra, ma molti altri sono rimasti nello spazio nonostante abbiano da tempo esaurito la loro funzione e perciò rappresentano, a tutti gli effetti, spazzatura spaziale. Basti pensare che il satellite più antico ancora in orbita è **Vanguard 1**, il quinto satellite artificiale lanciato dall'uomo [4], nel marzo 1958.

Considerando, inoltre, la grande quantità di detriti spaziali generata dalla collisione di satelliti non più in funzione, i nuovi lanci e la scarsa attenzione prestata in passato a produrne il minor numero possibile, oggi sono oltre 20000 gli oggetti considerati spazzatura spaziale tracciati e siamo ancora molto lontani dal conoscerli tutti [5]. Lo studio di questi oggetti è di vitale importanza al fine di garantire l'incolumità dei satelliti ancora in servizio e degli astronauti che presidiano la Stazione Spaziale Internazionale. I detriti spaziali di grandezza superiore a qualche centimetro possono essere localizzati e tracciati utilizzando telescopi terrestri, in modo da consentire alle sonde in rotta di collisione di effettuare manovre preventive per evitarli. Tuttavia, anche detriti di pochi millimetri di diametro, a causa della loro velocità, posso causare danni molto gravi, come dimostra ciò che è accaduto ad un pannello solare della sonda **Copernicus Sentinel-1A**, danneggiato da un detrito di 1 mm di diametro che viaggiava alla velocità di 28000 $\frac{km}{h}$ (Figura 1.1) [3].

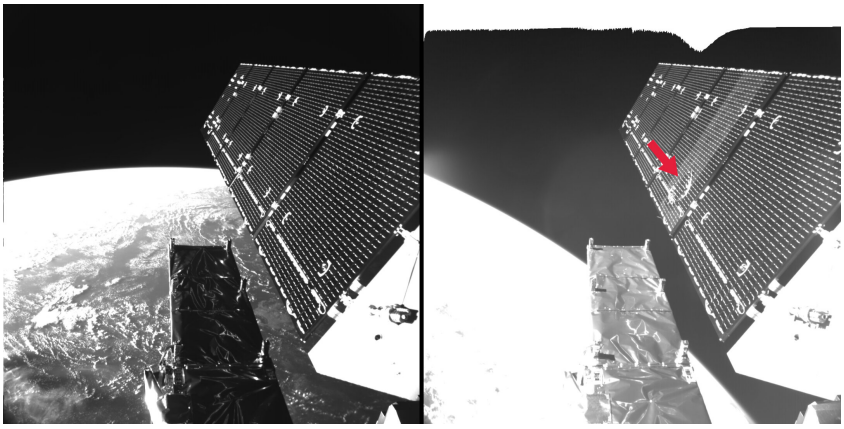


Figura 1.1: Pannello Solare della sonda Copernicus Sentinel-1A prima (sx) e dopo (dx) la collisione con un detrito di 1 mm di diametro. [3]

Un altro esempio è il danneggiamento di un braccio della Stazione Spaziale Internazionale causato anch'esso da un detrito non tracciato ad alta velocità (Figura 1.2) [2].

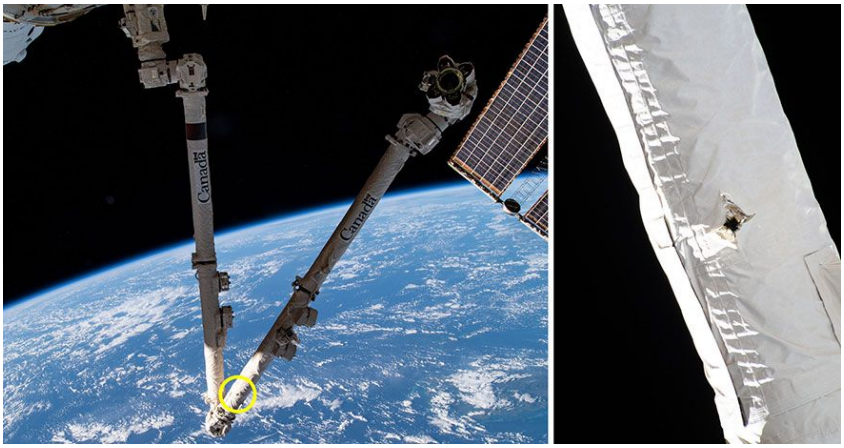


Figura 1.2: Braccio della Stazione Spaziale Internazionale colpito da un detrito (sx) e un suo ingrandimento (dx). [2]

A causa di incidenti come questi, ESA (European Space Agency) ha annunciato di voler lanciare in orbita entro il 2025 un telescopio con il solo scopo di tracciare, in numero sempre maggiore, i piccoli detriti spaziali [6].

L'Italia partecipa dal 2014 al progetto europeo **Space Surveillance and Tracking** (SST), ponendosi l'obiettivo di aiutare l'intera comunità europea a identificare il maggior numero di detriti spaziali. In particolare, a Bologna, il Telescopio Cassini di Loiano impiega a questo scopo parte del proprio tempo di osservazione (Figura 1.3).



Figura 1.3: Telescopio Cassini di Loiano.

Le grandi dimensioni dello specchio principale (152.4 cm) e lo strumento multiuso BFOSC[1] rendono questo telescopio tra i più sensibili nell'ambito dei telescopi ottici europei dedicati alla sorveglianza spaziale.

Recentemente, è nato anche un progetto che mira al potenziamento della strumentazione. In particolare, è stato progettato un sostituto per il BFOSC chiamato SuperFOSC. Questo strumento, come il suo predecessore, conterrà una modalità spettroscopica, che verrà utilizzata per identificare i materiali di cui sono costituiti i detriti spaziali o per altri studi.

L'obiettivo di questa tesi è quello di studiare tre differenti configurazioni della modalità spettroscopica del SuperFOSC, confrontando il potere risolutivo in funzione della complessità del sistema.

[1]Bologna Faint Object Spectroscopic Camera

Indice

1 Premessa **2**

2 Introduzione al Problema **7**
2.1 Descrizione Fisica 7
2.1.1 Spettro Solare 7
2.1.2 Spettroscopio 8
2.1.3 Reticoli di Diffrazione 10
2.2 Strumentazione 12
2.2.1 Telescopio Cassini 12
2.2.2 SuperFOSC 12
2.3 Immagine di un Detrito Spaziale 14
2.4 Basi del Problema 14
2.5 Configurazioni da Mettere a Confronto 14

3 Metodo Risolutivo **18**
3.1 Grandezza di un Singolo Raggio Luminoso 18
3.1.1 Seeing 21
3.2 Discretizzazione 24
3.3 Calcolo Potere Risolutivo 25
3.3.1 Potere Risolutivo Teorico 25
3.3.2 Fattori che Modificano il Potere Risolutivo 26
3.4 Ricerca dei Parametri 29
3.4.1 Discretizzazione della Traiettoria 29
3.4.2 Calcolo dell'Intensità 31
3.4.3 Calcolo Potere Risolutivo 33

4 Traiettorie Rettilinee **36**
4.1 Andamento del Potere Risolutivo nelle Tre Configurazioni in Esame . . . 36
4.1.1 Configurazione 1: Grism con fenditure orizzontali 38
4.1.2 Configurazione 2: Grism con fenditure parallele alla traiettoria . . 39

4.1.3 Configurazione 3: Grism con tre sezioni con fenditure a 120° fra loro 40
4.2 Conclusioni 42
4.2.1 Implementazioni Future 42

Elenco delle figure

1.1 Pannello Solare della sonda Copernicus Sentinel-1A prima (sx) e dopo (dx) la collisione con un detrito di 1 mm di diametro. [3] 3
1.2 Braccio della Stazione Spaziale Internazionale colpito da un detrito (sx) e un suo ingrandimento (dx). [2] 3
1.3 Telescopio Cassini di Loiano. 4

2.1 Tre diversi modelli che rappresentano lo spettro solare e la sua irradianza per lunghezza d'onda. [7] 7
2.2 Prisma triangolare utilizzato come spettroscopio. 8
2.3 Due successive rifrazioni su un prisma a facce parallele. 8
2.4 Rappresentazione del fenomeno della diffrazione da due fenditure (sx) e immagine sperimentale (dx). [8] 9
2.5 Reticolo di diffrazione con massimo principale bianco (spettro non separato) e massimi secondari in cui è osservabile lo spettro della radiazione incidente. [9] 10
2.6 Sia G un reticolo di diffrazione in riflessione (a) e in trasmissione (b). GN è la normale al piano del reticolo, α l'angolo di incidenza e β l'angolo di diffrazione. [10] 10
2.7 Reticolo di diffrazione in riflessione di larghezza W e larghezza del fascio incidente e diffratto rispettivamente d_1 e d_2. 11
2.8 Configurazione scelta tra campo di vista e camera. 13
2.9 Disegno tecnico di SuperFOSC. 13
2.10 Rappresentazione di come apparirebbe un detrito spaziale osservato con SuperFOSC in modalità immagine (sx) e in modalità spettroscopica (dx). In rosso la traiettoria del detrito. 14
2.11 Rappresentazione della degradazione del potere risolutivo e della sovrapposizione degli spettri. 15
2.12 Rappresentazione della formazione degli spettri nella seconda configurazione. 15
2.13 Rappresentazione del grism (sx) e dello spettro prodotto (dx) nella terza configurazione. 16
2.14 Rappresentazione della formazione degli spettri nella terza configurazione. Per ognuna delle tre traiettorie sono riportati tutti e tre gli spettri ottenibili. 16

3.1 Immagine al limite di diffrazione di un singolo raggio luminoso. [13] . . . 19
3.2 Caption for LOF . . . 20
3.3 Due immagini di Giove con seeing migliore (sinistra) e peggiore (destra) prodotte dalla medesima strumentazione a distanza di soli 5 giorni. . . . 22
3.4 Panoramica dell'Osservatorio di Mauna Kea, situato sul vulcano omonimo sull'isola Hawaii. [15] . . . 22
3.5 Rappresentazione del processo di discretizzazione della traiettoria. . . . 24
3.6 Rappresentazione della griglia a seguito del processo di assegnazione di un valore di intensità ad ogni pixel in caso di tre diverse traiettorie. . . . 25
3.7 Immagine prodotta da Zemax, dalla quale si ricava la grandezza dello spettro. Ogni colore rappresenta una diversa lunghezza d'onda fra quelle riportate in Tabella 3.3. . . . 26
3.8 Rappresentazione di tre diverse traiettorie e aumento di L al crescere del coefficiente angolare, con fenditure del grism sempre orizzontali. Vengono rappresentati tre diversi coefficienti angolari m=0,1,2. I cerchi blu (superiori) e rossi (inferiori) rappresentano l'unità di misura per L. All'interno delle sezioni gialle sono presenti cerchi appartenenti a spessori incompleti, che sono quindi trascurabili. . . . 27
3.9 Rappresentazione di tre diverse traiettorie e della rispettiva larghezza L in configurazione di grism rotante e sempre parallelo alla traiettoria. In giallo è cerchiato il minimo L, mentre in verde il massimo per la traiettoria obliqua. . . . 28
3.10 Rappresentazione di tre diversi valori del parametro D, che definisce la distanza tra due punti (cerchi verdi) nel processo di discretizzazione. Da sinistra a destra D=(5, 15, 40) μm. . . . 29
3.11 Andamento del potere risolutivo per diversi valori del parametro D. . . . 30
3.12 Istogramma dei poteri risolutivi calcolati utilizzando medesime traiettorie e parametri. Le variazioni di potere risolutivo sono dovute al rumore aggiunto ai raggi dei cerchi di discretizzazione. . . . 31
3.13 Andamento del potere risolutivo al variare del numero di subpixels. Sull'ascissa è riportata la lunghezza di ciascun pixel in unità di subpixel. . . . 32
3.14 Andamento del tempo di esecuzione al variare del numero di sub pixel. Sull'ascissa è riportata la lunghezza di ciascun pixel in unità di subpixel. 33
3.15 Rappresentazione dei parametri utilizzati nel calcolo del potere risolutivo. In giallo D_s e in verde D_c. . . . 34
3.16 Andamento del potere risolutivo all'aumentare del numero di linee tra due cerchi di discretizzazione, dunque al diminuire di D_s. . . . 34
3.17 Andamento del potere risolutivo all'aumentare del numero di cerchi per pixel, dunque al diminuire di D_c. . . . 35

4.1 Rappresentazione di due traiettorie traslate lungo la propria perpendicolare di soli 2 μm l'una dall'altra, con esplicitati i cerchi di discretizzazione. 37
4.2 Rappresentazione di due traiettorie traslate lungo la propria perpendicolare di soli 2 μm l'una dall'altra con esplicitati i cerchi per il calcolo della larghezza. 38
4.3 Andamento nella prima configurazione del potere risolutivo al crescere dell'inclinazione della traiettoria con l'asse orizzontale e fit con un coseno. 39
4.4 Andamento nella seconda configurazione del potere risolutivo al crescere dell'inclinazione della traiettoria con l'asse orizzontale e fit con un polinomio di secondo grado. 40
4.5 Andamento nella terza configurazione del potere risolutivo al crescere dell'inclinazione della traiettoria con l'asse orizzontale nelle tre inclinazioni del grism, con fit cosinusoidale. In rosso la parte di grism con fenditure orizzontali, in blu la parte con fenditure inclinate di 120°e in verde la parte con fenditure inclinate di 240°. 41
6 Andamento di $|\bar{\mathscr{R}}' - \bar{\mathscr{R}}|$ al crescere di K. 44

Elenco delle tabelle

2.1 Analisi delle traiettorie mostrate in Figura 2.14. 16

3.1 Diametri RMS calcolati con Zemax per un insieme di lunghezze d'onda, mediati sulla posizione all'interno del campo di vista. 21
3.2 Diametri dell'immagine di un singolo raggio luminoso dovuti al seeing (d_{seeing}) e alla diffrazione (d) per telescopi con due diversi diametri in due diversi luoghi della terra. In tutti i casi si è scelto $\lambda = 725\ nm$ 23
3.3 Diametro dell'immagine di un singolo raggio luminoso a causa del seeing a diverse lunghezze d'onda. 23
3.4 Larghezza media delle tre traiettorie di Figura 3.8 in unità di cerchi e potere risolutivo calcolato con $\lambda = 725\ nm$. 27
3.5 Larghezza media delle tre traiettorie di Figura 3.9 in unità di cerchi e potere risolutivo calcolato con $\lambda = 725\ nm$. 28

4.1 Potere risolutivo calcolato per traiettorie traslate perpendicolarmente rispetto alla traiettoria di qualche decimo di pixel. Si presuppone $\lambda = 725$ nm. 37
4.2 Valore dei parametri e relativi errori ricavati dal fit di Figura 4.3. 39
4.3 Valore dei parametri e relativi errori ricavati dal fit di Figura 4.4. 40
4.4 Valore dei parametri e relativi errori ricavati dal fit di Figura 4.4. 41

Capitolo 2

Introduzione al Problema

2.1 Descrizione Fisica

Questa Tesi si concentra sull'utilizzo di SuperFOSC come spettrometro. Si riporta di seguito una breve descrizione dei fenomeni fisici trattati.

2.1.1 Spettro Solare

I detriti spaziali orbitanti riflettono la luce solare che li colpisce, permettendoci di osservarli. La radiazione elettromagnetica prodotta dal Sole, tuttavia, non è monocromatica[1], ma possiede un spettro molto vasto, riportato in 2.1.

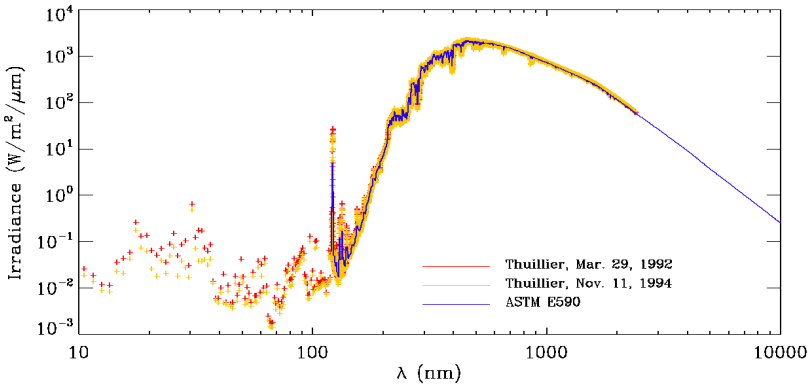


Figura 2.1: Tre diversi modelli che rappresentano lo spettro solare e la sua irradianza per lunghezza d'onda. [7]

[1] Ovvero composta da fotoni con la medesima lunghezza d'onda

Questo spettro muta a seguito della sua riflessione su un oggetto, il quale assorbe e riflette la radiazione a determinate lunghezze d'onda, in base alla propria composizione. Quindi, conoscendo gli spettri di assorbimento, è possibile ricavare il materiale di cui è costituito l'oggetto in esame.

2.1.2 Spettroscopio

La composizione spettrale della radiazione elettromagnetica può essere studiata utilizzando uno spettroscopio. Questo strumento permette di separare la radiazione in fasci diversi a seconda della lunghezza d'onda. Lo spettroscopio più rudimentale è costituito da un prisma di vetro, il quale, grazie alla sua forma e alla dipendenza dell'indice di rifrazione dalla lunghezza d'onda, separa un fascio di luce entrante nelle sue componenti spettrali 2.2.

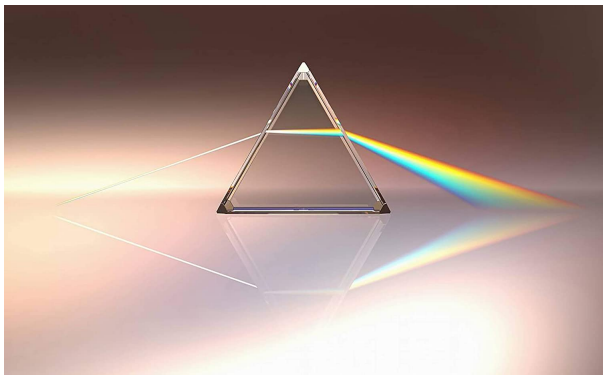


Figura 2.2: Prisma triangolare utilizzato come spettroscopio.

Il fenomeno fisico che produce questo effetto è chiamato rifrazione 2.3.

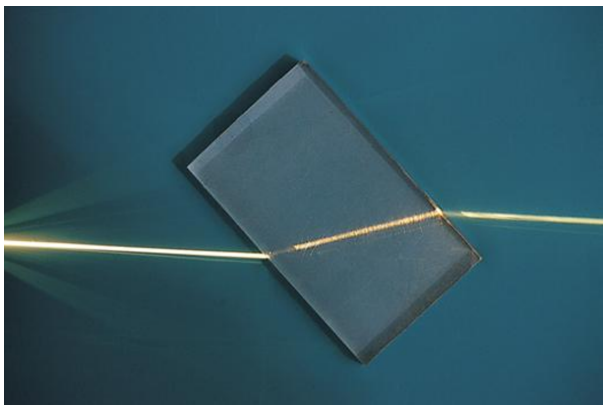


Figura 2.3: Due successive rifrazioni su un prisma a facce parallele.

Questo fenomeno è governato dalla legge di Snell:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{2.1}$$

Dove n_1, n_2 sono gli indici di rifrazione dei mezzi in cui si trovano rispettivamente il raggio incidente e quello rifratto, mentre θ_1, θ_2 sono gli angoli compresi tra la normale alla superficie che divide i due mezzi e, rispettivamente, il raggio incidente e quello rifratto. L'indice di rifrazione di un mezzo, tuttavia, dipende dalla lunghezza d'onda. Ne consegue che, in un cambio di mezzo, si avranno angoli θ_2 diversi per raggi luminosi di diversa lunghezza d'onda. Questo spiega il fenomeno rappresentato in figura 2.2. Spettroscopi più compatti possono essere costruiti sfruttando il fenomeno della diffrazione. Solitamente questo fenomeno si incontra nello studio di un fascio di luce monocromatica e coerente che incide su una o più fenditure di grandezza paragonabile alla lunghezza d'onda. In questo caso, sperimentalmente si osserva la comparsa di bande chiare e scure che si alternano su uno schermo lontano, a valle delle fenditure 2.4.

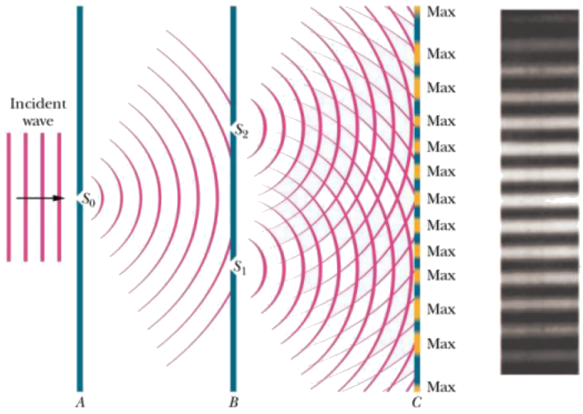


Figura 2.4: Rappresentazione del fenomeno della diffrazione da due fenditure (sx) e immagine sperimentale (dx). [8]

Grazie alla dipendenza dalla lunghezza d'onda della posizione di tutti i massimi,[2] ad eccezione di quello principale, è possibile costruire dei reticoli di diffrazione che separano la radiazione nel proprio spettro 2.5.

[2]Bande luminose raffigurate in Figura 2.4

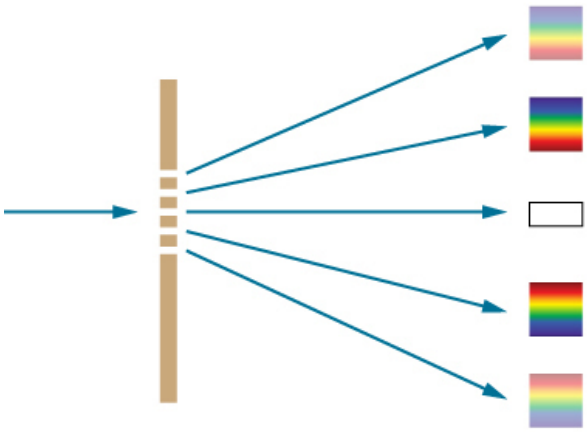


Figura 2.5: Reticolo di diffrazione con massimo principale bianco (spettro non separato) e massimi secondari in cui è osservabile lo spettro della radiazione incidente. [9]

2.1.3 Reticoli di Diffrazione

Esistono due tipologie di reticoli di diffrazione: quelli in riflessione e quelli in trasmissione. In entrambi i casi possiamo definire un angolo di incidenza α e un angolo di diffrazione β, entrambi calcolati rispetto alla normale al piano del reticolo 2.6.

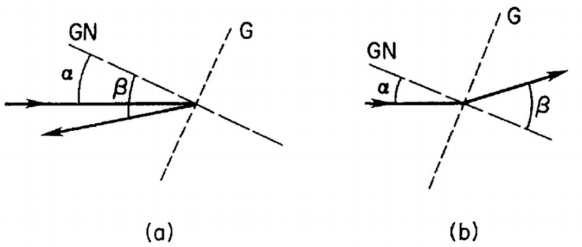


Figura 2.6: Sia G un reticolo di diffrazione in riflessione (a) e in trasmissione (b). GN è la normale al piano del reticolo, α l'angolo di incidenza e β l'angolo di diffrazione. [10]

Analiticamente si ricava l'**equazione dei reticoli di diffrazione** in trasmissione:

$$m\lambda = d(\sin\beta - \sin\alpha) \tag{2.2}$$

e in riflessione:

$$m\lambda = d(\sin\beta + \sin\alpha) \tag{2.3}$$

Queste equazioni vengono unite dalla notazione:

$$m\lambda = d(\sin\beta \pm \sin\alpha) \tag{2.4}$$

Dove m è l'ordine del massimo in esame, λ è la lunghezza d'onda e d è la distanza tra due fenditure successive.

Possiamo facilmente notare che, in caso di $\alpha = 0$, il massimo di ordine 0 si trova in $\beta = 0$, indipendentemente da λ. Questo spiega perché la luce non sia divisa nel suo spettro nel massimo principale 2.5.

Definiamo la **dispersione angolare** A come:

$$A = \frac{d\beta}{d\lambda} \tag{2.5}$$

Differenziando la 2.4 otteniamo:

$$\frac{d\lambda}{d\beta} = \frac{d}{m}\cos(\beta) \tag{2.6}$$

da cui invertendo ricaviamo:

$$A = \frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos(\beta)} \tag{2.7}$$

Definiamo infine il **potere risolutivo al limite di diffrazione** come:

$$\mathscr{R}_0 = \frac{\lambda}{d\lambda} \tag{2.8}$$

Da considerazioni geometriche si ricava che [11]:

$$\mathscr{R}_0 = Ad_2 \tag{2.9}$$

dove d_2 rappresenta la larghezza del fascio uscente come mostrato in figura 2.7.

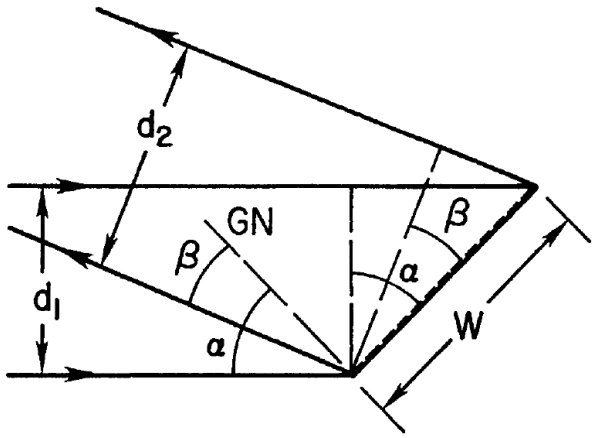


Figura 2.7: Reticolo di diffrazione in riflessione di larghezza W e larghezza del fascio incidente e diffratto rispettivamente d_1 e d_2.

Sostituendo nella 2.9 la 2.7 e considerando che $W \cos\beta = d_2$, si ricava:

$$\mathscr{R}_0 = \frac{mW}{d} = mN \tag{2.10}$$

dove $N = \frac{W}{d}$ è il numero totale di fenditure presenti nel reticolo. Questo risultato analitico (Equazione 2.10), tuttavia, è una semplificazione del reale funzionamento dello strumento SuperFOSC, che possiede un prisma e un reticolo di diffrazione combinati assieme.

2.2 Strumentazione

2.2.1 Telescopio Cassini

Cassini è un telescopio riflettore in configurazione Ritchey-Chrétien, con specchio primario di diametro pari a 152.4 cm, specchio secondario di diametro pari a 58.0 cm, una focale di 1200 cm, una scala di $17''/\text{mm}$ e un campo di $72'$ [1]. Questo strumento è stato inaugurato nel 1976 ed è dedicato all'astronomo **Giovanni Domenico Cassini**, il quale nel 1655 realizzò nella basilica di San Petronio la più lunga meridiana al mondo (66.8 m) [12].

2.2.2 SuperFOSC

SuperFOSC sarà uno strumento composto da 9 lenti sferiche e che potrà essere utilizzato come spettroscopio. L'apparato avrà una lunghezza complessiva di 180 cm e possiederà una piegatura (Figura 2.9) che lo renderà meno ingombrante e ne permetterà la rotazione senza urtare il terreno.
La camera[3] che utilizzerà lo strumento è la **Kepler 6060** composta da 6144×6200 pixel quadrati di lato 10 μm e dunque un'area immagine di $(61.44 \times 62)\ mm$. La configurazione scelta comporta che il lato della camera coincida con $60'$ di cielo. Questo risulta un buon compromesso tra porzione di campo non letta e porzione di camera inutilizzata, come mostrato in Figura 2.8.

[3] Rivelatore di fotoni che digitalizza l'immagine prodotta dal telescopio.

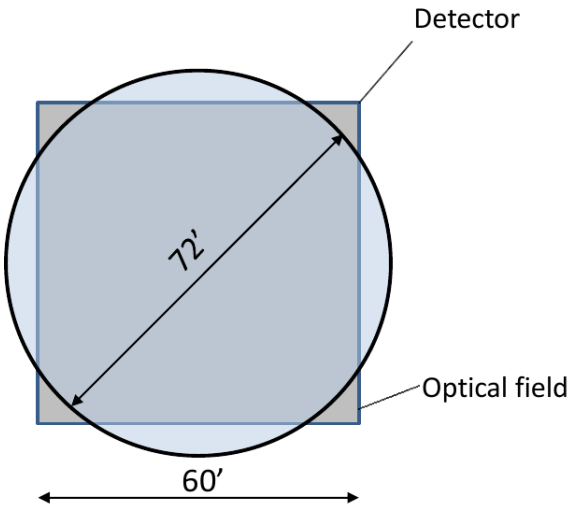


Figura 2.8: Configurazione scelta tra campo di vista e camera.

In questa configurazione, l'F-number risulta f/2.3 e la scala 0.6″/pixel.

L'elemento che separa lo spettro risulta essere un reticolo di diffrazione in trasmissione con una larghezza di 103.6 mm e 20 fenditure/mm. A causa della sovrapposizione dei massimi di ordine diverso, non è possibile utilizzare tutto il range spettrale della luce visibile $(0.4 - 0.95)$ μm, ma è necessario l'utilizzo di un filtro che restringa il suddetto range a $(0.5 - 0.95)$ μm.

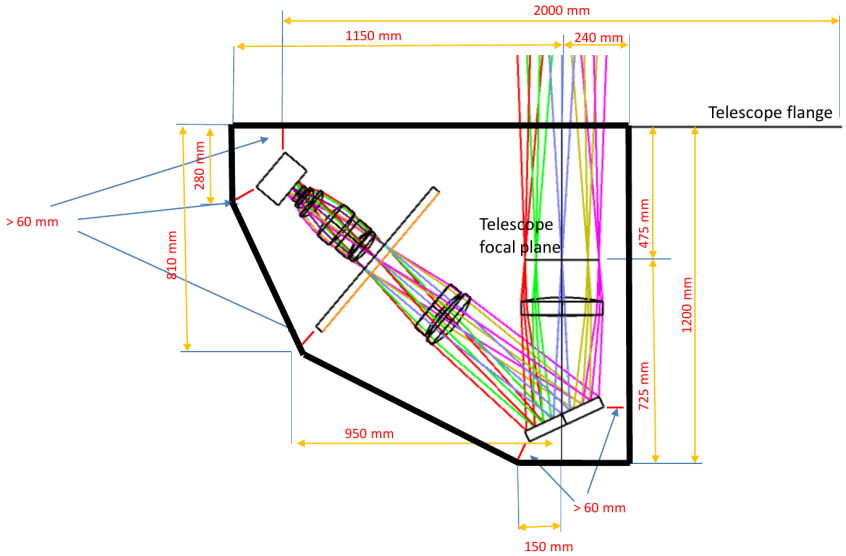


Figura 2.9: Disegno tecnico di SuperFOSC.

2.3 Immagine di un Detrito Spaziale

Il telescopio accoppiato allo strumento descritto nel paragrafo precedente può essere utilizzato per individuare detriti spaziali. Osservando un detrito con SuperFOSC in modalità immagine, si otterrà una linea luminosa corrispondente alla traiettoria seguita dall'oggetto, all'interno del campo di vista del telescopio. Osservando lo stesso oggetto in modalità spettroscopica, invece, si otterrà uno spettro continuo di linee parallele corrispondenti a diverse lunghezze d'onda.

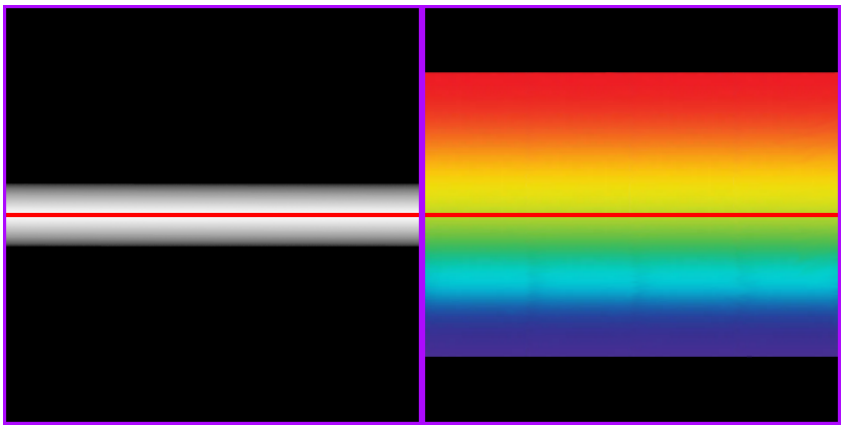


Figura 2.10: Rappresentazione di come apparirebbe un detrito spaziale osservato con SuperFOSC in modalità immagine (sx) e in modalità spettroscopica (dx). In rosso la traiettoria del detrito.

2.4 Basi del Problema

Questo studio si concentra sull'utilizzo di SuperFOSC come spettroscopio. A questo fine, è rilevante il grism all'interno di SuperFOSC, ovvero un reticolo che presenta delle fenditure parallele tra loro, le quali permettono di dividere un fascio di luce nel proprio spettro. L'obiettivo di questa analisi è trovare la geometria e l'orientazione delle fenditure del grism che massimizzino la qualità dell'immagine prodotta da SuperFOSC in relazione alle traiettorie dei detriti. La soluzione dovrà tenere conto non soltanto degli aspetti teorici del problema, ma anche della sua applicabilità pratica.

2.5 Configurazioni da Mettere a Confronto

La prima configurazione, trattata a scopo di confronto, analizza il semplice caso di fenditure del grism sempre orizzontali, indipendentemente dalla traiettoria dei detriti (Figura 2.11).

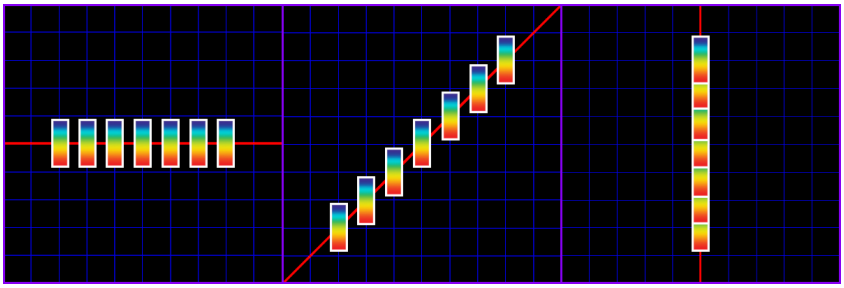


Figura 2.11: Rappresentazione della degradazione del potere risolutivo e della sovrapposizione degli spettri.

Come visibile in Figura 2.11, la leggibilità dello spettro è massima nel caso di traiettoria dei detriti orizzontale. Al contrario, nel limite di traiettoria verticale si avrebbe una completa sovrapposizione degli spettri, che renderebbe inutilizzabile l'immagine. In generale, restando le fenditure del grism orizzontali, possiamo aspettarci un peggioramento del potere risolutivo al crescere della pendenza della traiettoria.

La seconda configurazione prevede di ruotare il grism parallelamente alla traiettoria dei detriti. Si tratta di una soluzione tanto immediata, quanto complessa da applicare. La traiettoria, infatti, presenta due principali complicazioni. La prima riguarda la difficoltà tecnica di ruotare una componente del sistema ottico, la seconda concerne il fatto che bisogna conoscere a priori la traiettoria dell'oggetto.

Nonostante ciò, per quanto riguarda il potere risolutivo, ci aspettiamo che questo sia sempre massimo.

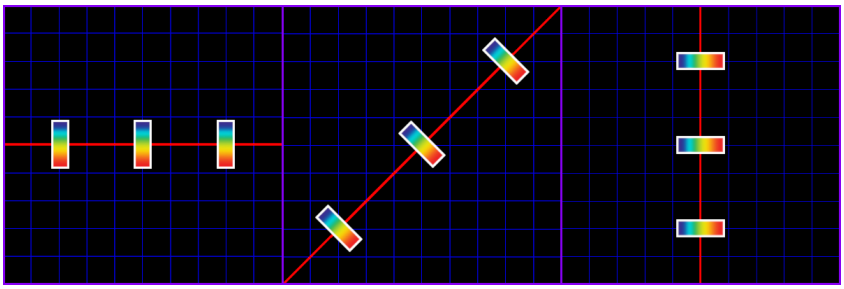


Figura 2.12: Rappresentazione della formazione degli spettri nella seconda configurazione.

Nella terza configurazione, il grism viene diviso in tre sezioni con fenditure poste a 120° l'una dall'altra, come rappresentato dalla Figura 2.13.

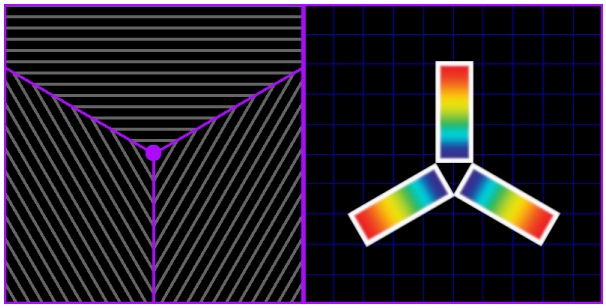


Figura 2.13: Rappresentazione del grism (sx) e dello spettro prodotto (dx) nella terza configurazione.

Questa geometria consente di avere un alto potere risolutivo senza dover né conoscere a priori la direzione dell'oggetto esaminato né ruotare nessun elemento ottico.

Tuttavia, questa soluzione presenta alcuni svantaggi, come quelli riguardanti la costruzione dell'elemento, che risulta più complessa. Inoltre, trattandosi di un'idea nuova, mancano studi che ne supportino la validità. Più avanti, si indagherà sull'effettiva efficacia di questa soluzione.

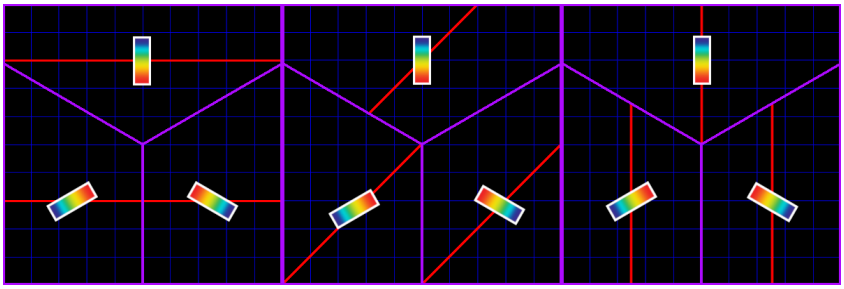


Figura 2.14: Rappresentazione della formazione degli spettri nella terza configurazione. Per ognuna delle tre traiettorie sono riportati tutti e tre gli spettri ottenibili.

Al fine di chiarire quest'ultima configurazione, la tabella sottostante esplicita, per ognuna delle tre traiettorie visibili in Figura 2.14, il potere risolutivo delle sezioni del grism.

Traiettoria	Sezione del grism che produce lo spettro migliore	Sezione del grism che produce lo spettro peggiore
Orizzontale	Superiore	Entrambe le Inferiori
Obliqua	Inferiore Destra	Inferiore Sinistra
Verticale	Entrambe le Inferiori	Superiore

Tabella 2.1: Analisi delle traiettorie mostrate in Figura 2.14.

In conclusione, l'obiettivo di questo studio è comprendere le differenze quantitative tra queste tre configurazioni al fine di selezionare la migliore da applicare.

Capitolo 3

Metodo Risolutivo

In questo capitolo è riportata la procedura attraverso la quale viene calcolato il potere risolutivo dello spettro prodotto da un grism con fenditure che formano un angolo arbitrario con la traiettoria.

3.1 Grandezza di un Singolo Raggio Luminoso

L'immagine di un singolo raggio luminoso in un qualunque sistema ottico non è un punto di dimensioni infinitesime ma, nel limite di aberrazioni nulle, è simile a quanto mostrato in Figura 3.1.

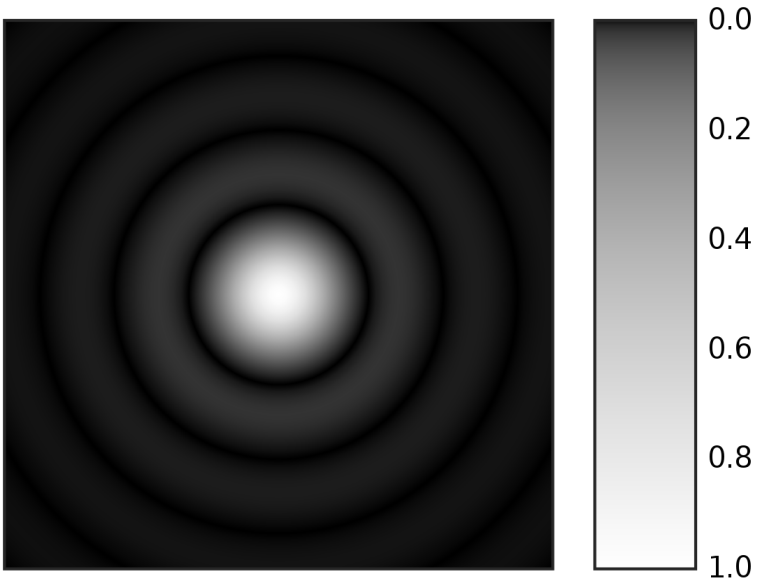


Figura 3.1: Immagine al limite di diffrazione di un singolo raggio luminoso. [13]

Questo fatto è dovuto alla presenza della diffrazione, assente solo nel limite di telescopio di diametro infinito. I dischi visibili in Figura 3.1 sono chiamati dischi di Airy, dal nome dell'astronomo **George Biddell Airy**. La dimensione angolare del primo disco di Airy θ risulta essere:

$$sin(\theta) = 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{3.1}$$

dove λ è la lunghezza d'onda e D il diametro del telescopio.
Inoltre, per piccoli angoli θ possiamo supporre che:

$$\frac{d}{f} \approx \sin\theta \tag{3.2}$$

dove d è il diametro del disco di Airy ed f è la lunghezza focale. Infine troviamo quindi:

$$d \approx 1.22\frac{\lambda f}{D} \tag{3.3}$$

Nel caso analizzato, utilizzando le grandezze caratteristiche del Telescopio Cassini e la lunghezza d'onda centrale $\lambda = 0.725\ \mu m$, risulta:

$$d \approx 7.0\ \mu m \tag{3.4}$$

Questo sarà, dunque, il limite teorico della larghezza delle righe spettrali. Tuttavia, trovandoci ad esaminare un caso reale, sono presenti varie aberrazioni che allontanano da

questo limite. Utilizzando Zemax, un programma di simulazione ottica, è possibile ricavare, attraverso una simulazione di ray tracing, la grandezza effettiva (diametro RMS[1]) dell'immagine di un singolo raggio luminoso prodotta dal Telescopio Cassini. In particolare, si ricava che il diametro RMS dipende, oltre che dalla lunghezza d'onda, anche dalla posizione del raggio all'interno del campo di vista. In Figura 3.1 sono riportate le immagini ricavate da Zemax di un raggio con $\lambda = 0.725\ \mu m$ passante per regioni diverse del campo di vista.

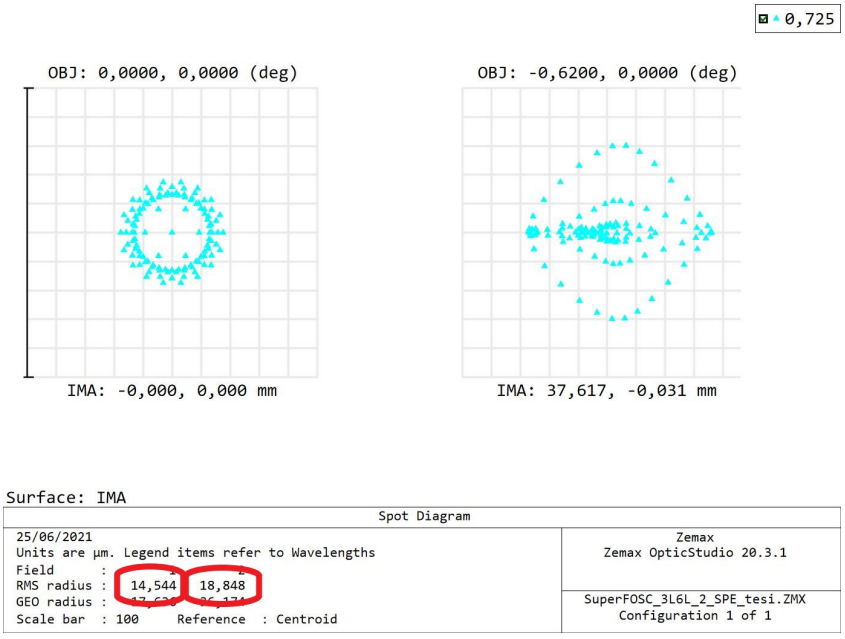


Figura 3.2: Spot Diagram[3] di un raggio di $\lambda = 0.725\ \mu m$ in due posizioni diverse del campo di vista. A sinistra un raggio centrale e a destra un raggo marginale. In basso, cerchiati in rosso, i due raggi RMS in μm.

Nella tabella seguente sono riportati i valori mediati sulla posizione all'interno del campo di vista per l'insieme discreto di lunghezze d'onda che verrà esaminato.

[1]Root Mean Square

[3]Immagine di un singolo raggio luminoso prodotta da Zemax con un processo di ray tracing

λ (nm)	Raggio RMS (μm)
500	30.6
550	28.4
600	29.4
650	31.8
700	34.0
725	34.6
750	34.8
800	34.4
850	33.2
900	32.6
950	33.4

Tabella 3.1: Diametri RMS calcolati con Zemax per un insieme di lunghezze d'onda, mediati sulla posizione all'interno del campo di vista.

A questo punto, va notato come il diametro RMS abbia valori confrontabili con la grandezza dei pixel del sensore della camera utilizzata ($l_{pixel} = 10\ \mu m$). Quindi, nella trattazione non sarà più possibile supporre, al contrario del capitolo precedente, che i pixel siano di grandezza trascurabile. Essi andranno quindi inseriti tra le considerazioni.

3.1.1 Seeing

Un altro elemento che modifica la qualità delle osservazioni è il seeing. Quest'ultimo è dovuto a perturbazioni dell'atmosfera che modificano il fronte d'onda osservato, distorcendolo. La particolarità di questo peggioramento dell'immagine è che esso muta di giorno in giorno. Infatti, a seconda di vari fattori atmosferici, possono esserci giornate, anche molto vicine, con seeing migliore o peggiore, come osservabile in Figura 3.3.

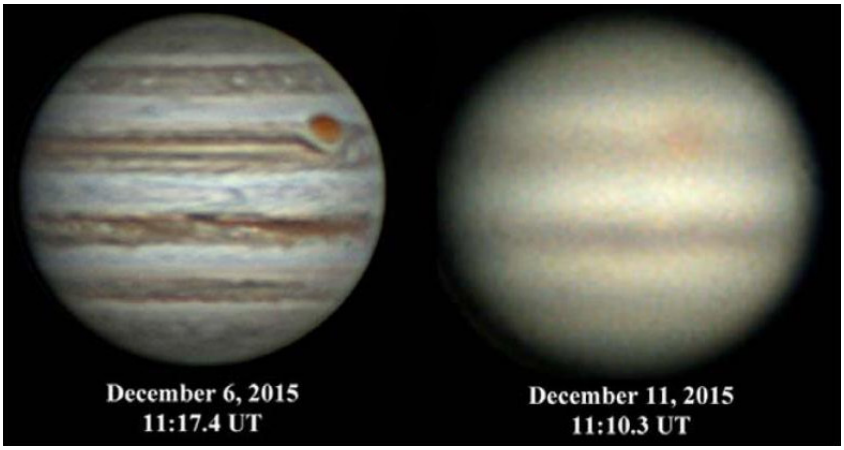


Figura 3.3: Due immagini di Giove con seeing migliore (sinistra) e peggiore (destra) prodotte dalla medesima strumentazione a distanza di soli 5 giorni.

In generale, sulla Terra sono presenti luoghi con seeing in media molto migliore di altri. Questo è un motivo per cui, una volta trovato un luogo con seeing ottimale, vi si costruiscono moltissimi telescopi (Figura 3.4).



Figura 3.4: Panoramica dell'Osservatorio di Mauna Kea, situato sul vulcano omonimo sull'isola Hawaii. [15]

Quantitativamente, la grandezza dell'immagine di un singolo raggio luminoso, a causa

del seeing, può essere calcolata come:

$$d_{seeing} \approx \frac{\lambda f}{r_0} \tag{3.5}$$

dove r_0 rappresenta una media delle larghezze delle variazioni del fronte d'onda prodotte dalle turbolenze atmosferiche.
In Tabella 3.2 sono riportati alcuni valori di r_0, d_{seeing} e d (diametro dell'immagine al limite di diffrazione) con due diverse grandezze di specchio primario (D) come confronto.

Luogo	r_0 medio	d_{seeing}	d (D=1 m)	d (D=2 m)
Hawaii	30 cm	29 μm	11 μm	5 μm
Loiano	12 cm	72.5 μm	11 μm	5 μm

Tabella 3.2: Diametri dell'immagine di un singolo raggio luminoso dovuti al seeing (d_{seeing}) e alla diffrazione (d) per telescopi con due diversi diametri in due diversi luoghi della terra. In tutti i casi si è scelto $\lambda = 725\ nm$

Nel caso del telescopio Cassini è possibile calcolare i valori riportati in Tabella 3.3.

λ (nm)	d_{seeing} (μm)
500	50.0
550	55.0
600	60.0
650	65.0
700	70.0
725	72.5
750	75.0
800	80.0
850	85.0
900	90.0
950	95.0

Tabella 3.3: Diametro dell'immagine di un singolo raggio luminoso a causa del seeing a diverse lunghezze d'onda.

Mettendo questi valori a confronto con quelli calcolati in Tabella 3.1, si nota come la qualità dell'immagine sia definita dal seeing piuttosto che dalle aberrazioni del sistema ottico.

3.2 Discretizzazione

In modo del tutto indipendente dalla configurazione in esame, prima di poter calcolare il potere risolutivo, è necessario discretizzare la traiettoria. Data una retta passante per il centro dell'immagine, essa è discretizzata quando viene trasformata in un insieme di punti equidistanti, con distanza parametrizzata e grandezza pari al diametro RMS calcolato nel paragrafo precedente.
Si noti che il diametro RMS varia a seconda della lunghezza d'onda (Tabella 3.1). Ai fini di questa analisi, si assume che la distribuzione spaziale della sua intensità sia gaussiana. Un esempio grafico del processo di discretizzazione è rappresentato in Figura 3.5.

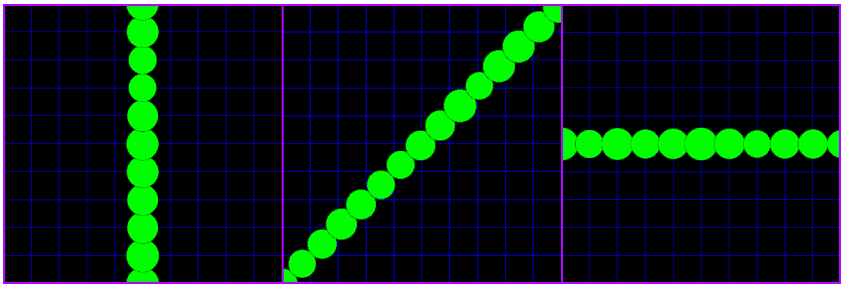


Figura 3.5: Rappresentazione del processo di discretizzazione della traiettoria.

Osservando attentamente la Figura 3.5, si nota che i raggi dei cerchi non sono tutti uguali. Il motivo di questa differenza verrà trattato nel Paragrafo 3.4.1.

Una volta prodotta la lista dei cerchi di discretizzazione, a partire da essi è necessario definire l'intensità dei pixel che formano il sensore della camera. Ogni pixel viene suddiviso in un numero parametrizzato di subpixels, ai quali viene assegnata un'intensità in base alla distanza dai punti adiacenti discretizzati in precedenza. Il pixel assume, poi, la somma delle intensità dei subpixels. Una volta identificate le intensità di tutta la griglia, si normalizzano le intensità per scopi di visualizzazione. Concluso questo processo, si ha una griglia in cui a ciascun pixel è associato un valore di intensità compreso tra zero e uno (Figura 3.6).

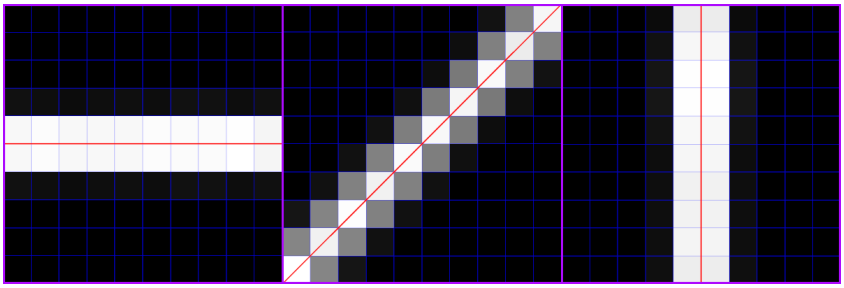


Figura 3.6: Rappresentazione della griglia a seguito del processo di assegnazione di un valore di intensità ad ogni pixel in caso di tre diverse traiettorie.

3.3 Calcolo Potere Risolutivo

3.3.1 Potere Risolutivo Teorico

Giunti a questo punto, è possibile calcolare il potere risolutivo. Esso è definito come:

$$\mathscr{R} = \frac{\lambda}{d\lambda} \tag{3.6}$$

Per avere un'idea dell'andamento generale, verrà utilizzato il set di lunghezze d'onda presentato in Tabella 3.3. Viene ora analizzato come scrivere il $d\lambda$, che da qui in poi indicherò con $\Delta\lambda$. Sempre utilizzando Zemax, possiamo verificare che lo spettro in esame ha larghezza pari a 2000 μm.

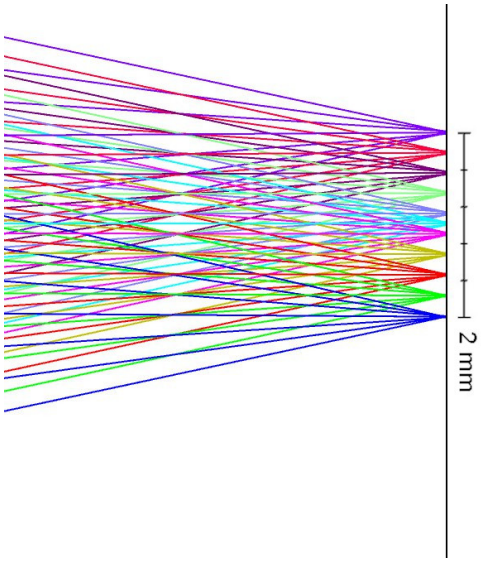


Figura 3.7: Immagine prodotta da Zemax, dalla quale si ricava la grandezza dello spettro. Ogni colore rappresenta una diversa lunghezza d'onda fra quelle riportate in Tabella 3.3.

Dunque $\Delta\lambda$ sarà dato da:

$$\Delta\lambda = \frac{0.950\ \mu m - 0.500\ \mu m}{\frac{2000\ \mu m}{d_{seeing}(\lambda)}} \tag{3.7}$$

con d_{seeing} il diametro di un singolo raggio luminoso.
Tuttavia, come mostrato nella 3.5, si ha che $d_{seeing} \propto \lambda$, da cui:

$$\mathscr{R} = \frac{r_0}{f} \cdot \frac{2000\ \mu m}{0.450\ \mu m} \approx 55.5 \tag{3.8}$$

Si conclude, dunque, che il potere risolutivo è indipendente dalla lunghezza d'onda.

3.3.2 Fattori che Modificano il Potere Risolutivo

Quanto detto nel paragrafo precedente, in realtà, vale solo nel caso di traiettoria parallela alle fenditure del grism e sensore ottico con numero infinito di pixel. In generale, l'equazione 3.7 va modificata come segue:

$$\Delta\lambda = \frac{0.950\ \mu m - 0.500\ \mu m}{\frac{2000\ \mu m}{L(\lambda,\ traiettoria)}} \tag{3.9}$$

dove L rappresenta la larghezza delle linee spettrali perpendicolari alle fenditure del grism.

Traiettoria e Potere Risolutivo

Come già accennato nel Paragrafo 2.4 e osservabile in Figura 2.11, non ruotando il grism si ha un progressivo peggioramento del potere risolutivo al crescere dell'inclinazione della traiettoria. In particolare, possiamo calcolare l'andamento di $\mathscr{R}$ calcolando $L(\lambda,\ traiettoria)$. Supponendo che la traiettoria sia rettilinea e passante per il centro dell'immagine, si avrà che questa sarà univocamente definita dal suo coefficiente angolare m. Per comprendere le ragioni di questa degradazione, si riporta la Figura 3.8, di seguito discussa.

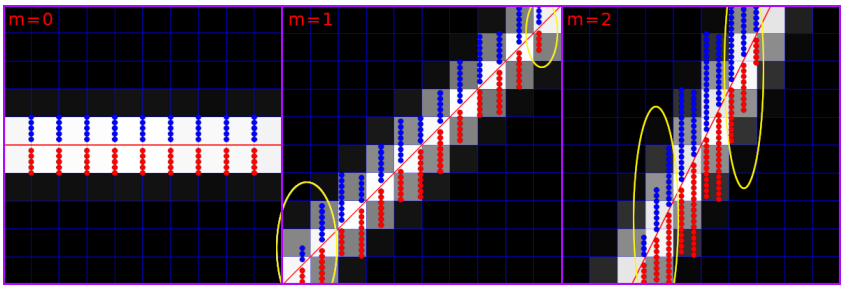


Figura 3.8: Rappresentazione di tre diverse traiettorie e aumento di L al crescere del coefficiente angolare, con fenditure del grism sempre orizzontali. Vengono rappresentati tre diversi coefficienti angolari m=0,1,2. I cerchi blu (superiori) e rossi (inferiori) rappresentano l'unità di misura per L. All'interno delle sezioni gialle sono presenti cerchi appartenenti a spessori incompleti, che sono quindi trascurabili.

I cerchi blu e rossi in figura rappresentano l'unità di misura per identificare la larghezza della linea spettrale in analisi (L). La larghezza viene misurata verticalmente, poiché è stato considerato che il grism sia fisso e abbia le fenditure orizzontali. Possiamo notare che alcuni insiemi di punti, quelli cerchiati in giallo, vanno ignorati, perché calcolati in regioni parzialmente uscenti dalla griglia. Per ogni traiettoria si ricavano, dunque, la larghezza e il potere risolutivo attraverso la (3.9) e sapendo che ogni cerchio ha diametro pari a 2 μm.

m	$L(m)$ in unità di cerchi	$\mathscr{R}$
0	10	161
1	14	115
2	21	77

Tabella 3.4: Larghezza media delle tre traiettorie di Figura 3.8 in unità di cerchi e potere risolutivo calcolato con $\lambda = 725\ nm$.

Grandezza Finita dei Pixel e Potere Risolutivo

Un altro fattore che modifica L, e di conseguenza il potere risolutivo, è la discretizzazione stessa del sensore utilizzato per raccogliere i fotoni. Per comprendere gli effetti della discretizzazione, si suppone che il grism ruoti e sia, dunque, sempre parallelo alla traiettoria. La Figura 3.9, di seguito discussa, serve a comprendere come viene modificato L.

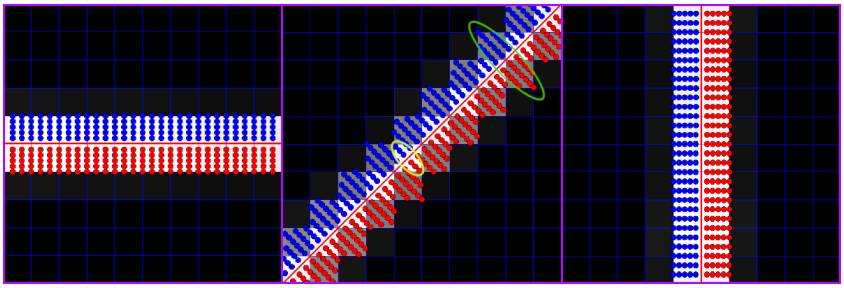


Figura 3.9: Rappresentazione di tre diverse traiettorie e della rispettiva larghezza L in configurazione di grism rotante e sempre parallelo alla traiettoria. In giallo è cerchiato il minimo L, mentre in verde il massimo per la traiettoria obliqua.

Innanzitutto, va notato come questo fattore non modifichi in alcun modo L nel caso di traiettorie orizzontali e verticali. Per quanto riguarda la traiettoria obliqua, invece, la larghezza varia molto con la posizione lungo la retta. In giallo è circondata la minore larghezza, 6 cerchi, e in verde la maggiore, 14 cerchi. Nel primo e terzo caso in Figura 3.9, la larghezza in unità di cerchi è definita, mentre per quando riguarda il secondo caso si dovrà prendere la media tra tutte le larghezze calcolate. Di seguito sono riportati larghezza e potere risolutivo nei tre casi:

m	$L(m)$ in unità di cerchi	$\mathscr{R}$
0	10.0	161
1	9.7	166
∞	10.0	161

Tabella 3.5: Larghezza media delle tre traiettorie di Figura 3.9 in unità di cerchi e potere risolutivo calcolato con $\lambda = 725\ nm$.

Lo strano aumento di potere risolutivo per la seconda traiettoria verrà in seguito trattato.

3.4 Ricerca dei Parametri

In questa sezione vengono discussi i parametri utilizzati e quale sia il migliore valore da assegnare loro.

3.4.1 Discretizzazione della Traiettoria

Durante questo processo, spiegato nella Sezione 3.2, incontriamo due parametri. Il primo, chiamato D, riguarda la distanza tra due successivi punti, ovvero tra due dei cerchi verdi presenti in Figura 3.5. La scelta di questo parametro permetterà di trovare il giusto equilibrio tra veridicità dei dati e tempo necessario per il calcolo degli stessi. Al crescere di D, ci si aspetta un allontanamento del modello dalla realtà e una maggiore velocità computazionale. Viceversa al suo decrescere. La Figura 3.10 riporta di seguito le rappresentazioni di tre diversi valori di D.

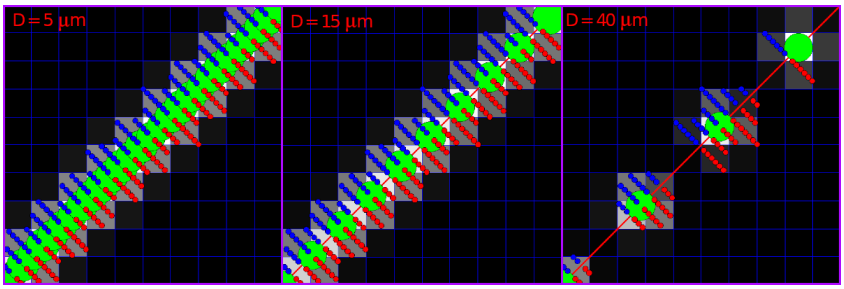


Figura 3.10: Rappresentazione di tre diversi valori del parametro D, che definisce la distanza tra due punti (cerchi verdi) nel processo di discretizzazione. Da sinistra a destra D=(5, 15, 40) μm.

Nei primi due casi, la retta discretizzata sui pixel appare continua, mentre nel terzo appare segmentata. Da un punto di vista qualitativo, i primi due casi producono una corretta rappresentazione della realtà, mentre il terzo è inaccettabilmente lontano da essa.

Al fine di comprendere, in modo più quantitativo, quale sia una corretta scelta di questo parametro, viene riportata la Figura 3.11.

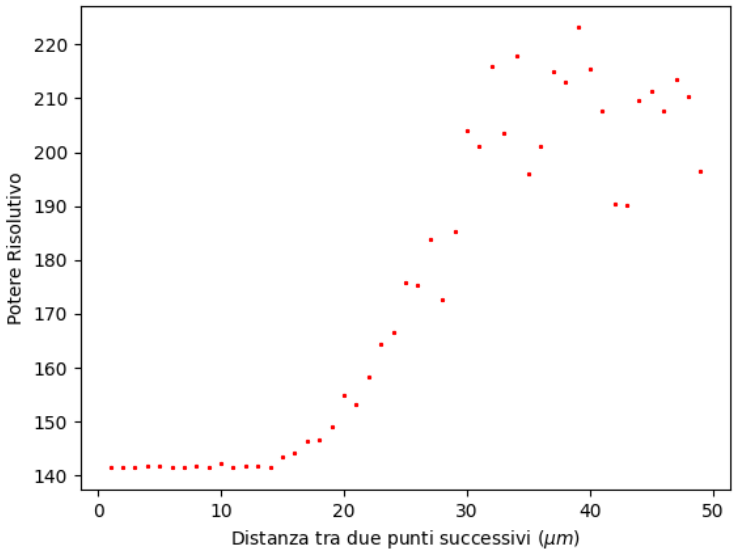


Figura 3.11: Andamento del potere risolutivo per diversi valori del parametro D.

Analizzando la Figura 3.11, si nota come il grafico si appiattisca e non ci siano più sostanziali differenze per valori di D minori di 10 μm. Questa risulterà, dunque, una buona stima per D.

Il secondo parametro riguardante la discretizzazione determina quanto rumore aggiungere al raggio di ciascun punto in cui viene discretizzata la traiettoria. Prima di analizzare quale possa essere una corretta quantità di rumore, bisogna indagare il motivo della sua presenza.

Come trattato nel paragrafo 3.1.1, il diametro del singolo raggio luminoso è determinato dal seeing. Quest'ultimo, come osservabile in figura 3.3, è tuttavia molto variabile nel tempo. Osservando l'andamento di r_0 nel tempo, si ricava che questo è distribuito linearmente tra i valori di (10 e 14) cm. Da questo, mediante la 3.5 con $\lambda = 725\ nm$, abbiamo che d_{seeing} varia tra (62 e 87) μm.

Per simulare un potere risolutivo in giornate con diverso seeing, si potrebbe ripetere il calcolo con diversi r_0 e dunque diversi d_{seeing}. Tuttavia, questo risulta un processo molto dispendioso e lento. Si preferisce perciò inserire un rumore sulla grandezza del raggio durante la discretizzazione di una singola traiettoria. Nonostante questo non corrisponda alla realtà, per grandi numeri otteniamo ottime approssimazioni di essa, come mostrato in Appendice 4.2.1.

Il rumore applicato ai dati causerà, dunque, una piccola variazione del potere risolutivo $\Delta\mathscr{R}$, anche ripetendo lo stesso identico calcolo. È possibile stimare questa variazione calcolando più volte il potere risolutivo con traiettoria inclinata dello stesso angolo e con

parametri di calcolo uguali. Un istogramma che rappresenta i poteri risolutivi calcolati in questo modo è riportato in Figura 3.12.

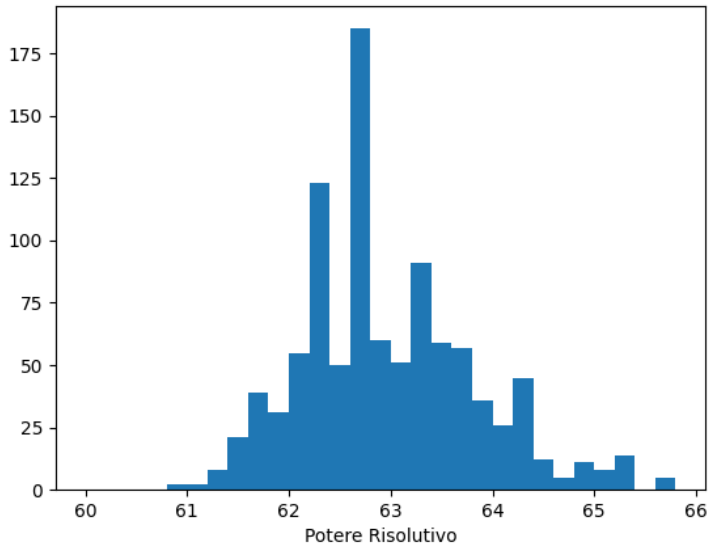


Figura 3.12: Istogramma dei poteri risolutivi calcolati utilizzando medesime traiettorie e parametri. Le variazioni di potere risolutivo sono dovute al rumore aggiunto ai raggi dei cerchi di discretizzazione.

I dati mostrati in Figura 3.12 hanno media $\mu = 62.97$ e scarto quadratico medio $\sigma = 0.88$. Possiamo quindi stimare che $\Delta\mathscr{R} \approx \sigma$ da cui:

$$\Delta\mathscr{R} = 0.88 \tag{3.10}$$

3.4.2 Calcolo dell'Intensità

Durante il calcolo dell'intensità da assegnare a ciascun pixel, processo descritto nella Sezione 3.2, si incontra un parametro che definisce il numero di subpixels. All'aumentare di questo parametro, aumentano la veridicità della simulazione e il tempo di computazione. Viceversa al suo diminuire. Si riporta in Figura 3.13 l'andamento del potere risolutivo in funzione della lunghezza di un pixel in unità di subpixels n (ogni pixel contiene n^2 subpixels).

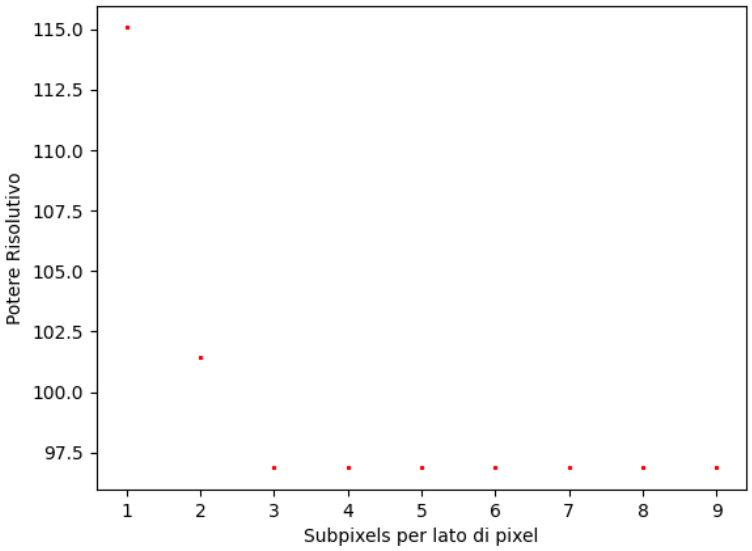


Figura 3.13: Andamento del potere risolutivo al variare del numero di subpixels. Sull'ascissa è riportata la lunghezza di ciascun pixel in unità di subpixel.

Come osservabile dal grafico, non ci sono sostanziali differenze da 3 subpixels per lato in poi. 4 può essere ritenuto dunque un buon valore per questo parametro. Un'ottimizzazione di questo parametro è fondamentale, visto l'andamento esponenziale del tempo di esecuzione al crescere del numero di subpixels evidenziato in Figura 3.14.

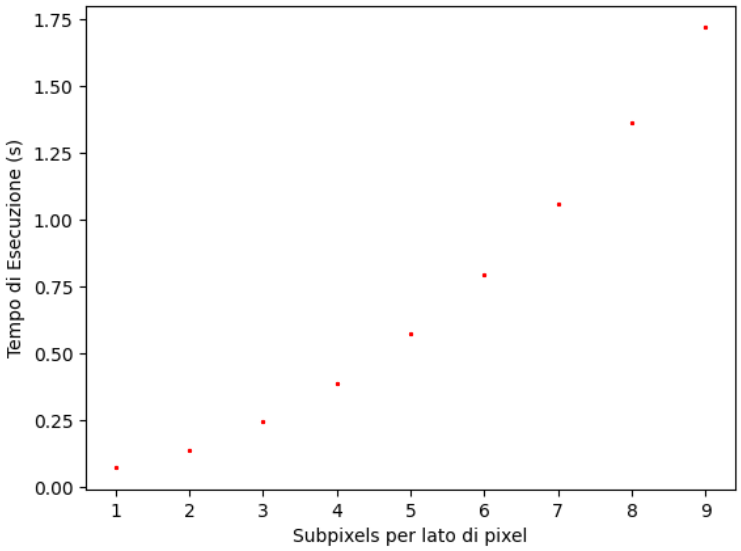


Figura 3.14: Andamento del tempo di esecuzione al variare del numero di sub pixel. Sull'ascissa è riportata la lunghezza di ciascun pixel in unità di subpixel.

3.4.3 Calcolo Potere Risolutivo

Anche nel calcolo di $\mathscr{R}$ sono presenti alcuni parametri, di seguito analizzati.

Il primo parametro riguarda la distanza D_s tra due successive serie di cerchi che fungono da unità di misura della larghezza. Il secondo D_c riguarda la distanza tra i centri di due successivi cerchi all'interno della stessa serie. Si riporta un esempio in Figura 3.15.

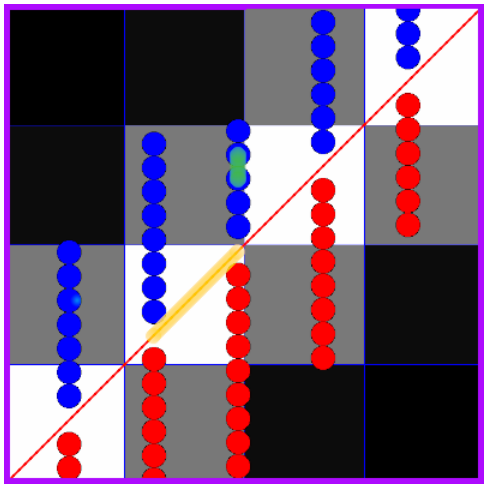


Figura 3.15: Rappresentazione dei parametri utilizzati nel calcolo del potere risolutivo. In giallo D_s e in verde D_c.

Si sottolinea che i raggi dei cerchi rossi e blu che compaiono in Figura 3.15 hanno solo scopi di visualizzazione e non rappresentano nessuna caratteristica del sistema.

Vediamo l'andamento del potere risolutivo al variare del parametro D_s riportato in Figura 3.16.

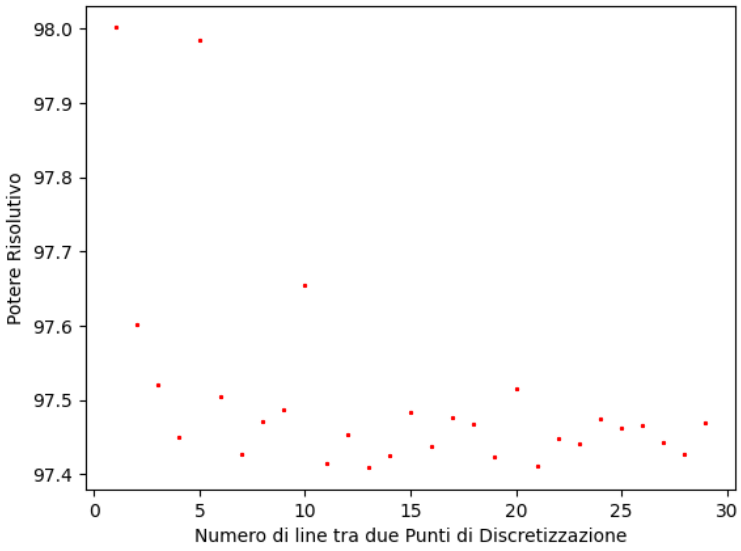


Figura 3.16: Andamento del potere risolutivo all'aumentare del numero di linee tra due cerchi di discretizzazione, dunque al diminuire di D_s.

Vediamo come non ci siano sostanziali differenze superate le 15 linee tra due punti di discretizzazione: dalla 3.10 si ha che $\Delta\mathscr{R} = 0.88$. Visto che $D = 10\ \mu m$, come trovato nella Sezione 3.4.1, si ha che $0.7\ \mu m$ sarà una buona stima per D_s.

La Figura 3.17 rappresenta ora l'andamento del potere risolutivo al variare del parametro D_c. Si noti che, per praticità, si riporta sulle ascisse il numero di cerchi per pixel invece di D_c.

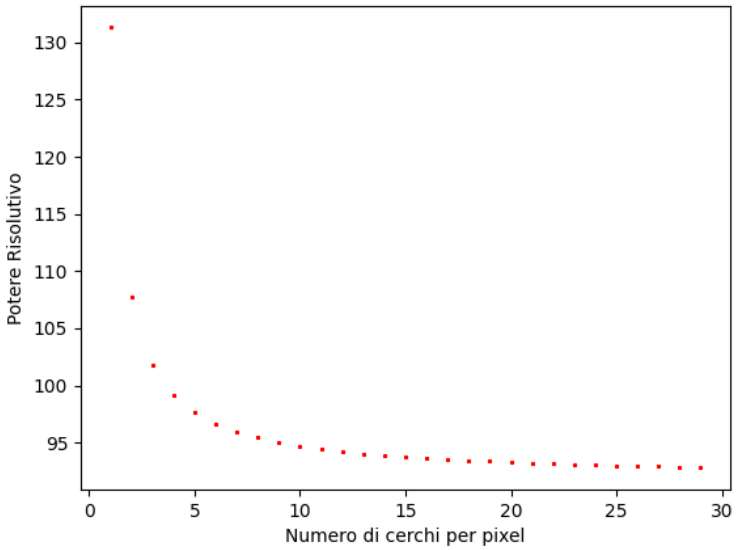


Figura 3.17: Andamento del potere risolutivo all'aumentare del numero di cerchi per pixel, dunque al diminuire di D_c.

Dalla figura si ricava che 15 è una buona stima per il numero di cerchi per pixel. Di conseguenza, visto che i pixel hanno dimensione $10\ \mu m$, una buona stima per D_c risulta $0.7\ \mu m$.

Capitolo 4

Traiettorie Rettilinee

Dopo aver discusso come calcolare il potere risolutivo per una generica traiettoria, in questa sezione verrà messo a confronto l'andamento del potere risolutivo al variare della traiettoria nelle tre configurazioni in esame. In particolare, si calcolerà il potere risolutivo per traiettorie con inclinazione crescente, partendo dal moto orizzontale e giungendo a quello verticale. Al fine di simulare un caso il più reale possibile, i calcoli verranno fatti in una griglia di 1000×1000 pixels, molto più grande di quelle mostrate fino ad ora.

4.1 Andamento del Potere Risolutivo nelle Tre Configurazioni in Esame

Prima di trattare caso per caso le tre configurazioni, è necessaria un'analisi più dettagliata di alcuni casi particolari.
Analizzando il caso introdotto in Figura 3.9, si è visto che calcolando il potere risolutivo lungo le tre traiettorie sono stati ottenuti i valori riportati in Tabella 3.5. Tuttavia, spostando la traiettoria di pochi decimi di pixel lungo l'asse ad essa perpendicolare, possiamo osservare grandi variazioni di $\mathscr{R}$, come mostrato in Tabella 4.1.

Traslazione $\perp$ alla traiettoria (μm)	$\mathscr{R}$
+10	121.5
+8	145.4
+6	136.9
+4	121.5
+2	121.5
0	166.3
-2	121.5
-4	121.5
-6	136.9
-8	145.4
-10	121.5

Tabella 4.1: Potere risolutivo calcolato per traiettorie traslate perpendicolarmente rispetto alla traiettoria di qualche decimo di pixel. Si presuppone $\lambda = 725\ nm$.

Come osservabile, ci sono variazioni molto grandi di $\mathscr{R}$. Esse possono essere comprese osservando la seguente Figura 4.1.

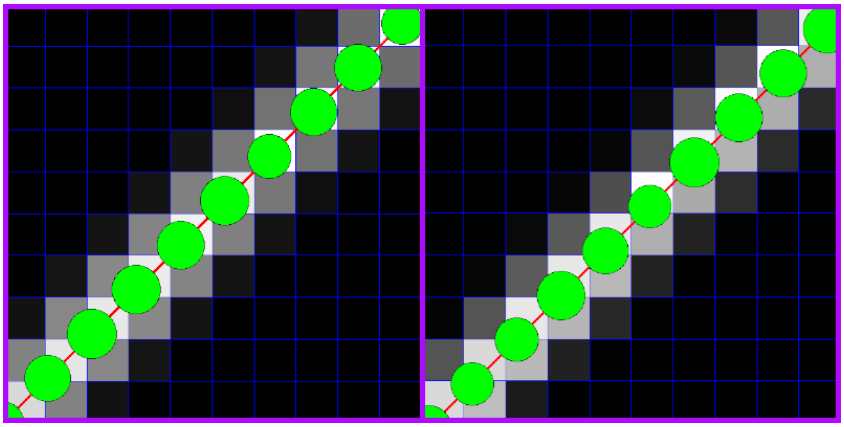


Figura 4.1: Rappresentazione di due traiettorie traslate lungo la propria perpendicolare di soli 2 μm l'una dall'altra, con esplicitati i cerchi di discretizzazione.

Nonostante le due traiettorie differiscano soltanto di una traslazione di 2 μm l'una dall'altra, vediamo come quella di (dx) abbia una larghezza molto maggiore di quella di (sx) a causa della grandezza non trascurabile dei pixel. In Figura 4.2 si sottolinea ancora meglio questo aspetto.

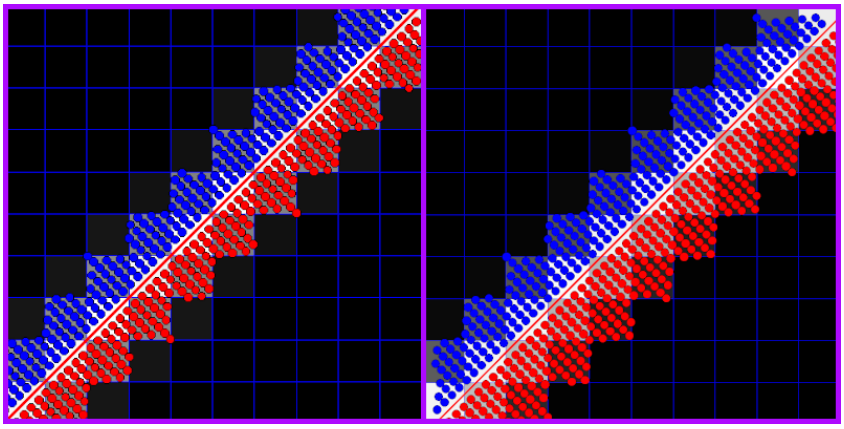


Figura 4.2: Rappresentazione di due traiettorie traslate lungo la propria perpendicolare di soli 2 μm l'una dall'altra con esplicitati i cerchi per il calcolo della larghezza.

Da questa immagine è chiaro che la larghezza, espressa in unità di cerchi, è molto diversa nei due casi. Questo comporta ovviamente dalla 3.9 valori molto diversi del potere risolutivo, come riscontrato in Tabella 4.1. Preso atto di questo fatto, è necessario decidere come confrontare fra loro i dati. Una prima soluzione potrebbe essere quella di prendere il peggiore o il migliore valore tra quelli ottenuti attraverso la traslazione. Una seconda, invece, di prendere la media tra tutti i valori. Le prima strada risulta poco praticabile poiché, occupando l'intero spettro luminoso una vasta regione di pixels, in esso saranno presenti diverse lunghezze d'onda con poteri risolutivi nell'intero intervallo presentato in Tabella 4.1. Dunque, non potremo scegliere come valore rappresentativo per l'intero spettro il potere massimo o minimo. Quindi, al fine di confrontare al meglio le tre configurazioni, è stato scelto di praticare la seconda via, seppur con la consapevolezza che in un caso di specifica lunghezza d'onda si potrebbero trovare poteri risolutivi anche molto diversi da quelli medi calcolati.

4.1.1 Configurazione 1: Grism con fenditure orizzontali

In questa configurazione, come anticipato nella Sezione 2.5, ci si aspetta una progressiva diminuzione del potere risolutivo al crescere dell'inclinazione della retta. In particolare, si prevede un potere risolutivo pari al massimo ottenibile dal sistema nel caso di moti orizzontali e un potere risolutivo nullo nel caso di moti verticali. Di seguito, la Figura 4.3 riporta un grafico che rappresenta l'andamento del potere risolutivo al variare dell'inclinazione della traiettoria con l'asse orizzontale.

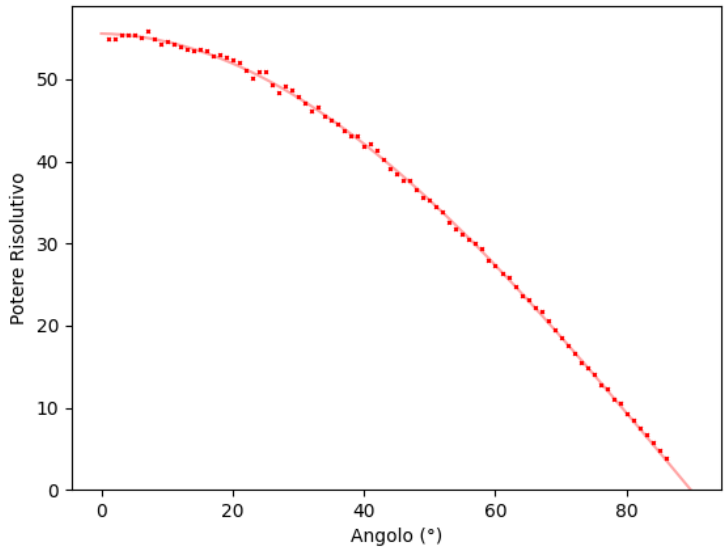


Figura 4.3: Andamento nella prima configurazione del potere risolutivo al crescere dell'inclinazione della traiettoria con l'asse orizzontale e fit con un coseno.

Come previsto, si ha un andamento decrescente. In particolare, la funzione con la quale si è eseguito il fit dei dati è un coseno i cui parametri sono di seguito riportati:

$$a \cdot \cos(bx + c) \tag{4.1}$$

Nome	Valore	Errore
a	55.59	0.12
b	0.991	0.005
c	0.019	0.007

Tabella 4.2: Valore dei parametri e relativi errori ricavati dal fit di Figura 4.3.

4.1.2 Configurazione 2: Grism con fenditure parallele alla traiettoria

In questa configurazione, come anticipato in Sezione 2.5, si presuppone che il potere risolutivo rimanga sempre quello massimo nel limite di pixel infinitesimi. Tuttavia, si vedrà che la grandezza non trascurabile di questi ultimi introduce alcuni effetti che ci allontaneranno, seppur di poco, dalla predizione fatta. Di seguito (Figura 4.4) si riporta l'andamento del potere risolutivo all'aumentare dell'angolo tra traiettoria ed orizzonte.

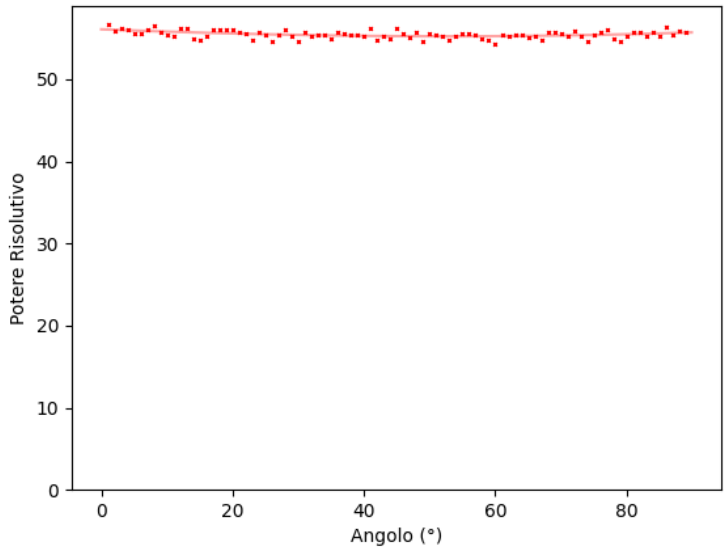


Figura 4.4: Andamento nella seconda configurazione del potere risolutivo al crescere dell'inclinazione della traiettoria con l'asse orizzontale e fit con un polinomio di secondo grado.

Emerge che il potere risolutivo rimane molto vicino a quello massimo per ogni angolo, nonostante si abbia una leggera concavità con minimo prossimo ai 45°. Questo effetto è dovuto unicamente alla grandezza non trascurabile dei pixels. Ai fini del confronto in oggetto, questa concavità è trascurabile, dato che è proporzionale a 4 $\Delta\mathscr{R}$. Anche in questo caso si esegue un fit, questa volta polinomiale, di cui sono riportati di seguito i risultati.

$$ax^2 + bx + c \tag{4.2}$$

Nome	Valore	Errore
a	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$0.8 \cdot 10^{-4}$
b	$-3.3 \cdot 10^{-2}$	$0.8 \cdot 10^{-2}$
c	56.12	0.14

Tabella 4.3: Valore dei parametri e relativi errori ricavati dal fit di Figura 4.4.

4.1.3 Configurazione 3: Grism con tre sezioni con fenditure a 120° fra loro

Nella terza e ultima configurazione, si prevedono andamenti simili a quelli della prima configurazione per quanto riguarda le singole sezioni del grism. Tuttavia, ai fini del

confronto, verrà scelta di volta in volta la sezione con massimo potere risolutivo.

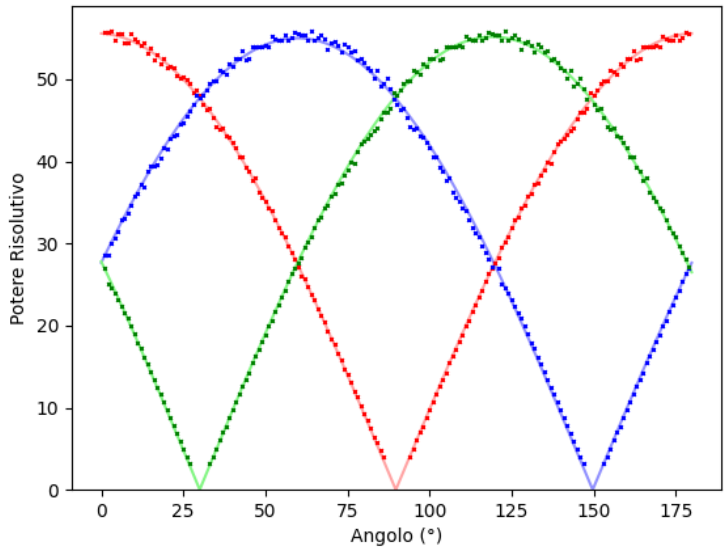


Figura 4.5: Andamento nella terza configurazione del potere risolutivo al crescere dell'inclinazione della traiettoria con l'asse orizzontale nelle tre inclinazioni del grism, con fit cosinusoidale. In rosso la parte di grism con fenditure orizzontali, in blu la parte con fenditure inclinate di 120°e in verde la parte con fenditure inclinate di 240°.

Come osservabile, abbiamo tre andamenti simili a quelli della prima configurazione per ogni direzione del grism. Tra loro questi andamenti sono traslati. Prendendo sempre in considerazione il migliore, abbiamo dei minimi per 30°, 90°e 60°, dei massimi per 0°, 60°e 120°. Nei valori massimi, il potere risolutivo è paragonabile a quello della seconda configurazione (≈ 55), per i minimi esso ha valore ≈ 48. Per ogni direzione del grism è stato eseguito un fit con la seguente funzione:

$$|a \cdot \cos(bx + c)| \tag{4.3}$$

Da essa sono stati ricavati i seguenti risultati:

Nome	Valore Rossa	Valore Blu	Valore Verde
a	55.77 ± 0.12	55.29 ± 0.07	54.7 ± 0.4
b	0.981 ± 0.005	1.003 ± 0.005	1.01 ± 0.01
c	0.032 ± 0.007	-1.053 ± 0.003	1.040 ± 0.005

Tabella 4.4: Valore dei parametri e relativi errori ricavati dal fit di Figura 4.4.

4.2 Conclusioni

A seguito dell'analisi si evince, dunque, che la prima configurazione non può essere applicata, in quanto ha scarsissimi poteri risolutivi per traiettorie che formano grandi angoli con l'orizzonte. La seconda configurazione risulta avere un potere risolutivo pressoché massimo per tutte le traiettorie. Infine, la terza configurazione ha poteri risolutivi sempre superiori all'87 % di quello massimo. Per quanto riguarda le difficoltà legate legate ad applicazioni pratiche, la seconda configurazione necessita di un sistema meccanico per la rotazione del grism e della conoscenza dell'inclinazione della traiettoria osservata. L'ultima soluzione, invece, utilizzando un prodotto non commerciale, presenta complessità costruttive. Un'analisi più completa, che prenda in considerazione aspetti economici e altri fattori qui non trattati, è necessaria al fine di decidere quale sia la migliore configurazione applicabile.

4.2.1 Implementazioni Future

Una implementazione futura di questo studio concerne la possibilità di ripetere l'analisi svolta nei precedenti capitoli su traiettorie curve. Non assumendo più che la traiettoria dei detriti passi per il centro del campo di vista, inoltre, si renderebbe necessario prendere in considerazione anche il peggioramento dell'immagine nelle zone periferiche del campo di vista. Infine, si potrebbero condurre delle analisi sulla probabilità che un detrito abbia una determinata traiettoria e, di conseguenza, fare ulteriori considerazioni sulla migliore configurazione del grism utilizzabile.

Seeing come Rumore sul Diametro dello Spot Diagram

Ciò che si vuole mostrare è che la media dei poteri risolutivi $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$,$\mathscr{R}_3$..., dove $\mathscr{R}_i$ è calcolato utilizzando cerchi di discretizzazione di egual diametro d_i, può essere approssimata, nel limite dei grandi numeri, calcolando un unico potere risolutivo $\mathscr{R}$, con cerchi di risoluzione di diametro distribuito linearmente nell'intervallo $[\min_i(d_i); \max_i(d_i)]$.

Per dimostrare questa affermazione, è utile una semplificazione del problema. Si supponga di calcolare K poteri risolutivi $[\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \mathscr{R}_3, \dots, \mathscr{R}_K]$, ciascuno con $d_i = i$. Escludendo le costanti dalla 3.7, si avrà che $\mathscr{R}_i = \frac{1}{i}$. Se ne può poi calcolare il valore medio:

$$\bar{\mathscr{R}} = \sum_{i=1}^{K} \frac{1}{iK} \tag{4}$$

Viene ora preso in considerazione il metodo approssimato per determinare il potere risolutivo. Si calcola un unico potere risolutivo $\bar{\mathscr{R}}'$ utilizzando K cerchi di raggio linearmente distribuito tra $[d_K;\ d_1]$. La differenza tra $\bar{\mathscr{R}}$ e $\bar{\mathscr{R}}'$ è riportata nel Grafico 6 per valori crescenti di K.

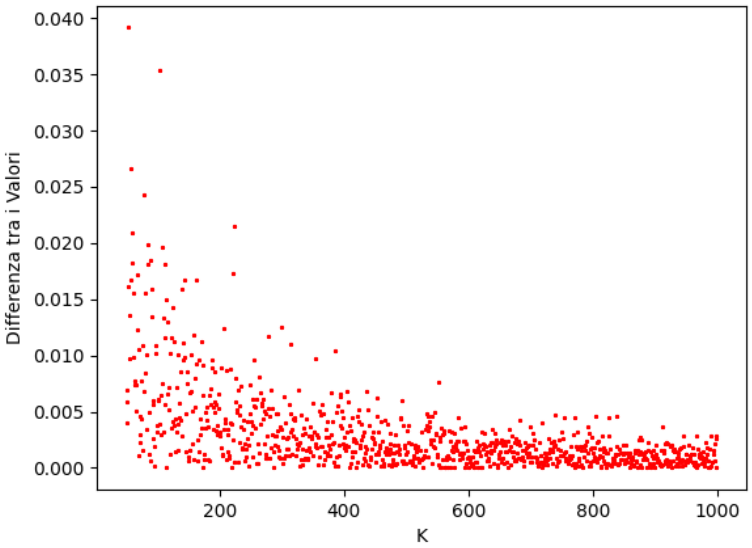


Figura 6: Andamento di $|\bar{\mathscr{R}}' - \bar{\mathscr{R}}|$ al crescere di K.

L'andamento della differenza delle due espressioni risulta diminuire esponenzialmente all'aumentare di K. Dunque, si ritiene provata l'ipotesi.

Bibliografia

[1] INAF: Telescopio Cassini
https://www.oas.inaf.it/it/chi-siamo/loiano-it/telescopio-cassini/

[2] ISS colpita da un detrito
https://www.space.com/space-station-robot-arm-orbital-debris-strike

[3] Copernicus Sentinel-1A colpita da un detrito
https://www.esa.int/Applications/Observing_the_Earth/Copernicus/Sentinel-1/Copernicus_Sentinel-1A_satellite_hit_by_space_particle

[4] SATCAT: Catalogo Satelliti
https://www.space-track.org

[5] Progetto SST Bologna
https://www.oas.inaf.it/it/ricerca/m3-it/progetto-sst/

[6] Annuncio da parte dell'ESA di mandare in orbita un telescopio per l'indentificazione di detriti spaziali
https://www.space.com/orbiting-space-debris-telescope-esa

[7] Articolo della Nasa sull'irradianza solare
https://www.nasa.gov/mission_pages/sdo/science/solar-irradiance.html

[8] Immagine riguardante la diffrazione
https://www.phys.uniroma1.it

[9] Immagine riguardante i reticoli di diffrazione
https://opentextbc.ca

[10] Immagine riguardante i reticoli di diffrazione
https://www.unibo.it/it/didattica/insegnamenti/insegnamento/2019/450932

[11] D.J. Schroeder. Astronomical Optics. *Elsevier Science*, 1999

[12] Giovanni Domenico Cassini - Wikipedia
https://it.wikipedia.org/wiki/Giovanni_Cassini

[13] Disco di Airy - Wikipedia
https://it.wikipedia.org/wiki/Disco_di_Airy

[14] George Biddell Airy - Wikipedia
https://it.wikipedia.org/wiki/George_Biddell_Airy

[15] Osservatorio di Mauna Kea - Wikipedia
https://it.wikipedia.org/wiki/Osservatorio_di_Mauna_Kea

Ringrazio il mio relatore per la disponibilità, la mia famiglia per il supporto e Chiara, Elisa e Francesca per avermi aiutato nella revisione.